数理解析研究所講究録
159巻 1972年 40-51



# 「グラフ極限で定義される Hamiltonian」に関するノート

神戸大 理　麦林布道
香川大 教育　青木昌三

研究会で述べたことは論文として「プログレス」に投稿中であるので，[1] ここでは，論文に書かれていない二つのことがらをメモしておくことにする。その一つは，グラフ極限によって自己共役演算子を定義する論理で，Glimm-Jaffe の結果，とくに文献 2) の整理統合したものにすぎないが，重要であるのではっきりさせておきたい。他は，いわゆる高次評価の数学的帰納法による証明に関っている。

I.　$\{H_n\}$ をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で稠密な定義域 $D(H_n)$ をもつ自己共役演算子の列とする。各々の $D(H_n)$ からベクトル $\phi_n$ をとってきて，$\chi_n = H_n\phi_n$ とおいたとき，$\phi = \lim_{n\to\infty}\phi_n$ および $\chi = \lim_{n\to\infty}\chi_n$ が存在するとしよう。*) このような極限ベ

*) 以下において，$\lim_{n\to\infty}$ はすべて強収束を意味する。

クトルの全体$\{\varphi\}$，極限ベクトルの組の全体$\{\varphi,\chi\}$をそれぞれ$D_\infty$，$G_\infty$で表わす。$G_\infty$がある対称演算子$H_\infty$のグラフになっているための必要十分条件は，$D_\infty$が$\mathfrak{h}$で稠密なことである。$H_\infty$を$\{H_n\}$のグラフ極限という。$H_\infty$の自己共役性をいうには，次の定理が便利である。

定理　$\{H_n\}$をヒルベルト空間で稠密な定義域をもち，かつ$n$に関して一様に下に有界な自己共役演算子の列とする。$\{H_n\}$のグラフ極限があり，レゾルベント$R_n(z)=(H_n-z)^{-1}$が$z$のある負の値に対して$R(z)$に強収束すれば，$R(z)^{-1}$が存在し，$R(z)^{-1}+z$で定義される演算子は自己共役で$z$に依らない。

定理を証明する前に，この定理が場の量子論に適用される一般的情況を例をあげて説明しておこう。

構成的な場の量子論では，$H_n$は切断を伴なった系のHamiltonianを表わし，$n$有限は強い切断に，$n\to\infty$は切断をある程度ゆるめるか，または切断を全く取り除くことに相当する。$n$有限のときの$H_n$の自己共役性は，通常，正則摂動または異常摂動で確かめられる。$H_n$が$n$に関して一様に下に有界であることを最も端的にいうには，$N$を個数の演算子としたとき，一次評価

$$N \leq \mathrm{const}\,(H_n + b) \tag{1}$$

が $n$ に関して一様に成り立つ（即ち，const および $b$ が $n$ に無関係にとれる）ことを証明すればよい。

<u>例 1.</u>　空間切断を伴なった $Y_2$ 理論*)

運動量切断を併せて行えば，ボゾンの質量のくりこみをした Hamiltonian $H_n$ は正則摂動と異常摂動をくみ合せて，自己共役演算子として定義される。$n \to \infty$ は運動量切断を取り除くことに当る。[3] $n \to \infty$ とともに，ボゾンの質量のくりこみは無限大となる。(1) の一様評価は Dimock によって与えられた。[4]

<u>例 2.</u>　中性スカラー模型.

ボゾンの静止質量を $m\ (>0)$，エネルギーを $\omega(k) = \sqrt{k^2+m^2}$ とする。また，ボゾンの消滅，生成演算子はそれぞれ

$$a(\bar{f}) = \int a(k)\bar{f}(k)\,dk, \quad a^*(g) = \int a^*(k)\,g(k)\,dk \qquad (f, g \in L_2(R^3))$$

で与えられ，交換関係 $[a(\bar{f}), a^*(g)] = (f, g)$ をみたす。系の Hamiltonian は形式的に

$$H = H_0 + H_I + C \tag{2}$$

---

*) $Y_2$ 理論とは，二次元時空における Yukawa 型相互作用の理論をいう。

と書かれる。

(3) $$H_0 = \int \omega(k)\, a^*(k)\, a(k)\, dk$$

は自由 Hamiltonian,

(4) $$H_I = \int \left( v(k)\, a^*(k) + \bar{v}(k)\, a(k) \right) dk$$

は相互作用 Hamiltonian,

(5) $$C = \int |v(k)|^2 \omega(k)^{-1}\, dk$$

は，真空のエネルギーのくりこみを表わす項である。$(2\omega)^{1/2} v$ は相互作用のひろがりを与える関数のフーリエ変換になっている。$H_0$ は Fock 空間の本質的自己共役な演算子で，閉包をとることによって自己共役とみなせる。

いま，関数 $v(k)$ のノルム

$$\|v\|_j = \left[ \int |v(k)|^2\, \omega(k)^{-j+1}\, dk \right]^{1/2} \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

を導入し，各ノルムについて閉じた関数空間

$$G_j = \{ v(k) \,;\, \|v\|_j < \infty \}$$

を考える。容易にわかるように，$j < j'$ のとき，$G_j$ は $\|\cdot\|_{j'}$ ノルムによる位相で $G_{j'}$ の稠密な部分空間になっている。

今までに知られている結果は次のとおりである。$v \in G_1$ のとき，Hamiltonian (2) は正則摂動の理論によって定義される。$v \in G_2$ のとき，(2) は二次形式の正則摂動として意味づけられる。これらの場合，C はともに有限である。$v \in G_3$

であって $v \in G_2$ ならば, $C$ は無限大となるが, ユニタリ演算子

$$(6) \qquad U = \exp\left\{ \int (\bar{v}(k)a(k) - v(k)a^*(k))\, \omega(k)^{-1} dk \right\}$$

はそのまま意味を持ち続け, 全く形式的な計算によれば

$$(7) \qquad H = U H_0 U^{-1}$$

となる。この結果の数学的に厳密な解釈が定理を適用することによってえられるのである。その際, $H_n$ としては, (2) の中に入っている $v \in G_3$ を $\|\cdot\|_3$ ノルムで $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_3 = 0$ の如く近似する $v_n \in G_1$ で置き換えてえられるものをとるとよい。なお, 真相互作用に相当する $v$ は $G_4$ に属す。

## 定理の証明

$$\Delta = \{ z \,;\, \lim_{n\to\infty} R_n(z) = R(z) \}$$

とおくと, 十分大きい $n$ に対して, $\Delta$ は $H_n$ のレゾルベント集合 $\rho(H_n)$ に含まれる。$z_1, z_2$ のとき, $R(z)$ はレゾルベント方程式

$$(8) \qquad R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2) R(z_1) R(z_2)$$

を満たす。この方程式から, $R(z)$ の値域と核は $z$ に無関係であることがいえる。

$H_n$ は下に一様有界であるから, $\bigcap_n \rho(H_n)$ に属する負の数 $-b_0$ が存在する（一次評価 (1) が証明できれば, $b_0 = b$ と

とってよい)。直ちにわかるように、$\forall z \in (-\infty, -b_0)$ に対して、$\| z R_n(z) \| < M$ が $n$ について一様に成り立つ。$H_\infty$ を $\{H_n\}$ のグラフ極限とする。$H_\infty$ のグラフは

$$G_\infty = \{ (\phi, \chi) ; \phi = \lim \phi_n, \chi = \lim H_n \phi_n, \phi_n \in D(H_n) \}$$

であり、$H_\infty$ の定義域

$$D_\infty = \{ \phi ; (\phi, \chi) \in G_\infty \}$$

の稠密性は仮定されている。

$\forall \psi \in \mathfrak{h}_g$ と $\forall z \in (-\infty, -b_0)$ について $\| z R(z) \psi + \psi \|$ を考える。

$$\| z R(z) \psi + \psi \| \leq \| z R(z) \psi - z R_n(z) \psi \| + \| z R_n(z) (\psi - \phi) \| + \| z R_n(z) \phi + \phi \| + \| \psi - \phi \| .$$

ただし、$\phi$ は $D_\infty$ からとってきた。不等式の右辺の最初の二項はそれぞれ

$$\| z R(z) \psi - z R_n(z) \psi \| \leq |z| \, \| ( R(z) - R_n(z) ) \psi \| ,$$

$$\| z R_n(z) (\psi - \phi) \| \leq M \| \psi - \phi \|$$

となり、第3項は、$\{ \phi_n ; \phi_n \in D(H_n) \}$ を $\lim_{n \to \infty} \phi_n = \phi$ なるベクトルの列として

$$\| z R_n(z) \phi + \phi \| \leq \| z R_n(z) (\phi - \phi_n) \| + \| z R_n(z) \phi_n + \phi_n \| + \| \phi - \phi_n \| .$$

と書かれる。この各項は次のように評価される。

$$\| z R_n(z) (\phi - \phi_n) \| \leq M \| \phi - \phi_n \| ,$$

$$\|zR_n(z)\phi_n+\phi_n\|=\|R_n(z)H_n\phi_n\|\leq\frac{M}{|z|}\|H_n\phi_n\|.$$

従って，これらを綜合すれば

$$(9)\qquad \|zR(z)\psi+\psi\|\leq\frac{M}{|z|}\|H_n\phi_n\|+|z|\,\|(R(z)-R_n(z))\psi\|$$
$$+(M+1)\|\psi-\phi\|+(M+1)\|\phi-\phi_n\|$$

が任意の $n$ と $\forall z\in(-\infty,-b_0)$ に対して成り立つことがわかる。

先ず $|z|$ を十分大きくとる。その結果，(9)の第1項は $n$ について一様に小さくなる。次いで，$z$ の値をそのまゝ固定して，$n$ を十分大きくすると，(9)の第2項と第4項はいくらでも小さくなる。$D_\infty$ の稠密性が仮定されているから，第3項もまた小さくできる。よって，$z\in(-\infty,-b_0)$ で $|z|$ が十分大きいとき，$\forall\psi\in\mathfrak{H}$ について $\|zR(z)\psi+\psi\|$ はいくらでも小さくなることが示せた。この結果から二つのことがいえる。第一に，$R(z)$ の核はベクトル $0$ のみから成る。従って，$R(z)$ は逆をもつ。第二に，任意の $\psi\in\mathfrak{H}$ は $-zR(z)\psi$ で近似できる。従って，$R(z)$ の値域は $\mathfrak{H}$ で稠密である。故に，$H=R(z)^{-1}+z$ によって，稠密な定義域をもつ演算子が定まる。この定義が $z$ に無関係なことはレゾルベント方程式(8)から明らか。$z\in(-\infty,-b_0)$ のとき $R(z)$ は対称かつ有界な演算子であるから，$H$ は自己共役である。∎

II.　強い切断のあるときの Hamiltonian の定義に使われる摂動論は，(a) 演算子の正則摂動，(b) 二次形式の正則摂動および (c) 異常摂動である。これらの摂動論によれば，個数の演算子 $N$，自由 Hamiltonian $H_0$ および全 Hamiltonian $H$ の定義域の間には次の関係がある。

(a)　$D(N) \supset D(H_0) = D(H)$,

(b)　$D(N^{1/2}) \supset D(H_0^{1/2}) = D((H+b)^{1/2})$,

(c)　$D(N) \supset D(H_0) \supset D(H)$.

二次形式の正則摂動における定数 $b$ は $H$ を正定値にするためのものである。

定義域の包含関係から直ちに，次の補題によって $N$ と $H$ の大きさの比較が出来る。

<u>補　題</u>　バナッハ空間において，$T$ を閉演算子，$A$ を可閉 (closable) 演算子とし，$D(T) \subset D(A)$ を仮定する。正数 $d$ が存在して $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$ ならば，$^\forall\psi \in D(T)$ に対して

$$\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　$T$ をバナッハ空間 $X$ からバナッハ空間 $Y$ へ

の閉演算子，A を X から Y′ への可閉演算子とする。$D(T) \subset D(A)$ であるから，$A|D(T)$ を考えると，これは閉演算子である。適当なノルム $|||\cdot|||$ を導入して，そのノルムのもとで $D(T)$ がバナッハ空間

$$\hat{X} = \{D(T),\ |||\cdot|||\}$$

になれば，$A|D(T) : \hat{X} \to Y'$ は Banach の閉グラフ定理によって，いたるところで定義された閉演算子，従って有界演算であることがわかる。即ち，$\forall \psi \in D(T)$ に対して

$$\|A\psi\| \leq c|||\psi|||$$

となる。ここに c は A と T によってきまる定数である。閉演算子 T について補題の条件 $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$ がみたされていれば，$|||\psi||| = \|T\psi\|$ ととることができて，$\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$ をうる。∎

この補題から，(b) については N と H の一次評価を，(a) と (c) については二次評価を導くことができる。ところで，構成的な場の量子論ではいろいろな所で高次評価を必要とし，[5] 漸近場はその一例である。[6] 漸近場の存在証明の要点の一つは，$a^{\#}(f)$ を $a(\bar{f})$ または $a^{*}(f)$ としたとき，Hamiltonian H との交換関係 $[a^{\#}(f), H]$ の定義域が，ある正の整数 $l$ に対する $D(H^{l})$ を含むことを示すにある。[7] $[a^{\#}(f), H]$ は

個数の演算子 N のある巾でおさえられるから，高次評価

(10) $$N^{l} \leq \text{const}\,(H+b)^{l} \qquad l > 1$$

が証明されていればこの問題は解決する。ここに b は十分大きい正数。

相互作用 Hamiltonian が条件

(11) $$\int dk\, \| R^{1/2}(-b-\omega)\,[a(k), H_I]\,R^{1/2}(-b) \|^2 < \infty$$

（ただし，$R(z) = (H-z)^{-1}$）をみたすとき，高次評価 (10) は数学的帰納法によって証明できる。

かんたんのため，ボゾン場を例にとって，一次評価から二次評価を出す筋道を示そう。他の場合，一般次数への拡張は容易である。

$$N^2 = N + \int dk\, a^*(k)\, N\, a(k)$$
$$\leq \text{const.}\,(H+b)^2 + \int dk\, a^*(k)\, N\, a(k).$$

第1項に一次評価が使われている。第2項もまた $(H+b)^2$ の定数倍でおさえられることを示す。そのためには，任意の $\psi \in D(H)$ をとってきて，$\psi = R(-b)\varphi$ と書いたとき，不等式

$$\left( R(-b)\varphi,\ \int dk\, a^*(k)\, N\, a(k)\, R(-b)\varphi \right) \leq \text{const}\, \|\varphi\|^2$$

を示せばよい。いわゆる "pull through formula"

(12) $$a(k)\,R(-b) = R(-b-\omega)\,a(k) - R(-b-\omega)\,[a(k), H_I]\,R(-b)$$

を使って計算を行うと求める結果がえられる。

$$\left(R(-b)\varphi,\ \int d\mathbf{k}\, a^*(\mathbf{k})\, N a(\mathbf{k})\, R(-b)\varphi\right) = \int d\mathbf{k}\, \| N^{1/2} a(\mathbf{k}) R(-b)\varphi\|^2$$

$$\le 2\int d\mathbf{k}\, \| N^{1/2} R(-b-\omega)\, a(\mathbf{k})\varphi\|^2 + 2\int d\mathbf{k}\, \| N^{1/2} R(-b-\omega)\, [a(\mathbf{k}), H_I]\, R(-b)\varphi\|^2$$

$$\le 2\int d\mathbf{k}\, \| N^{1/2} R(-b-\omega)(N+2)^{1/2}\|^2 \cdot \|(N+2)^{-1/2} a(\mathbf{k})\varphi\|^2$$

$$+ 2\int d\mathbf{k}\, \| N^{1/2} R^{1/2}(-b-\omega)\|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b-\omega)\, [a(\mathbf{k}), H_I]\, R^{1/2}(-b)\|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b)\varphi\|^2$$

$$\le \text{const} \int d\mathbf{k}\, \| a(\mathbf{k})(N+1)^{-1/2}\varphi\|^2 + \text{const}\ \|\varphi\|^2$$

$$\le \text{const}\ \|\varphi\|^2 .$$

<u>注意</u>　二次形式の正則摂動(b)では、相互作用 Hamiltonian はベクトル0を除く $\mathfrak{H}$ のいたるところで定義されないので、条件式(11)と pull through formula (12) に $H_I$ が入っているのが気になる。この点は次のように解決できる。二次形式の正則摂動の一般条件

$$|(\psi, H_I\psi)| \le c(\psi, H_0\psi) + d(\psi,\psi)$$

より、対称演算子 $(cH_0+d)^{-1/2}H_I(cH_0+d)^{-1/2}$ は $\mathfrak{H}$ の稠密な領域の上で有界となり、その閉包 B は $\mathfrak{H}$ で有界な自己共役演算子である。$[a(\mathbf{k}), H_I]$ の両側に $R^{1/2}(-b-\omega)$ と $R^{1/2}(-b)$ がある限り、$H_I$ を $(cH_0+d)^{1/2}B(cH_0+d)^{1/2}$ で読みかえれば、(11)と(12)は二次形式の正則摂動についても意味をもつことがわかる。

//

## 文 献


1) M. Aoki and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. to appear.

2) J. Glimm and A. Jaffe, Commun. Pure Appl. Math 22 (1969), 401-414.

3) J. Glimm and A. Jaffe, Ann. Phys. 60 (1970), 321-383; J. Funct. Analy. 7 (1971), 323-357.

4) J. Dimock, Harvard University preprint (1971)

5) 例えば, L. Rosen, Commun. Pure Appl. Math. 24 (1971), 417-457.

6) N. Mugibayashi, preprint (1971) (A talk delivered at the International Seminar on Statistical Mechanics and Field Theory, Haifa, Israel, 1971 August)

7) Y. Kato and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 103-133.